

Podstawy Fizyki IV

Optyka z elementami fizyki współczesnej

wykład 4, 24.02.2012

wykład:	Czesław Radzewicz
pokazy:	Radosław Chrapkiewicz, Filip Ozimek
ćwiczenia:	Ernest Grodner



wykład 3 - przypomnienie

- źródła promieniowania EM
- potencjały pola EM
- równania na potencjały
- promieniowanie dipola elektrycznego
- detektory promieniowania EM: termiczne, kwantowe



propagacja światła w dielektrykach, 1

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (4)$$

związki materiałowe:

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

dielektryk – izolator, ośrodek materialny bez swobodnych ładunków czyli nośników prądu elektrycznego

trwałe bądź indukowane elektryczne momenty dipolowe

wyprowadzamy r-nie falowe (patrz wykład 2):

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0 = \frac{n^2}{c^2}$$

$$n = \sqrt{\mu \epsilon}$$

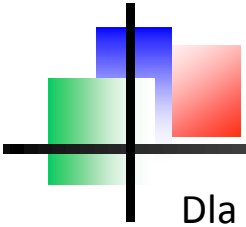
n - współczynnik załamania światła

inna prędkość fazowa:

$$v = \frac{c}{n}$$

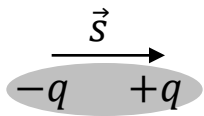
inna stała propagacji:

$$k = \frac{n\omega}{c}$$

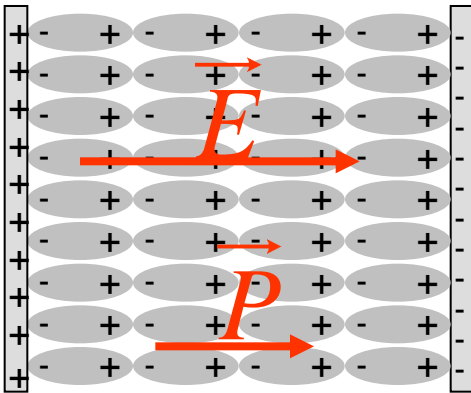


propagacja światła w dielektrykach, 2

Dla materiałów niemagnetycznych ($\mu = 1$) mamy $n = \sqrt{\epsilon}$



$\vec{p} = q\vec{s}$
moment dipolowy
atomu (cząsteczki)



polaryzacja ośrodka: \vec{P} , $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$

\vec{P} to gęstość momentów dipolowych: $\vec{P} = N\vec{p}$

$\vec{p} = \alpha\vec{E}$ gdzie α to polaryzowalność atomu

dla liniowej odpowiedzi ośrodka mamy: $\vec{P} = \epsilon_0\chi\vec{E}$

χ – podatność dielektryczna ośrodka

i ostatecznie:

$$\vec{D} = \epsilon_0\epsilon\vec{E} = \epsilon_0(1 + \chi)\vec{E}$$

oraz

$$n^2 = \epsilon = 1 + \chi$$

Model Lorentza, 1

Założenia:

ciężkie, nieruchome jądro

lekki elektron

siła sprężysta:

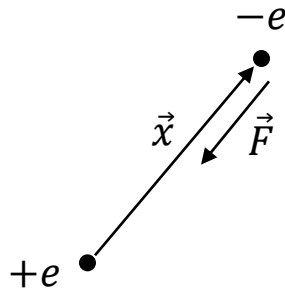
$$F_k = -kx = -m\omega_0^2 x$$

atom mały w porównaniu z λ :

$$F_E(t) = -eE(t)$$

straty typu tarcie:

$$F_T = -m\gamma \frac{dx}{dt}$$



r-nie ruchu elektronu:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_k + F_E + F_T$$

czyli

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = -eE_0 e^{-i\omega t}$$

ma rozwiązanie:

$$x(t) = x_0 e^{-i\omega t}$$

gdzie

$$x_0 = -\frac{e E_0}{m \omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

polaryzowalność atomu α można policzyć z momentu dipolowego atomu \vec{p} :

$$\vec{p} = -e\vec{x} = \frac{e^2}{m \omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega_0} \vec{E} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}$$

polaryzacja ośrodka:

$$\vec{P} = N \frac{e^2}{m \omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega_0} \vec{E}$$

gdzie

N to gęstość atomów

Model Lorentza 2



Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928)

H. A. Lorentz, *The Theory of Electrons and Its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat*, Leipzig, Teubner, 1916

... elastic force, which must be considered to be exerted by the other particles in the atom, but about whose nature we are very much in the dark, [...] proportional to the displacement.



współ. zał. dla gazów, 1

gaz (mała gęstość) - polaryzacja ośrodka nie zmienia pola elektrycznego fali ($P \ll \epsilon_0 E$)

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} = N \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega_0} \vec{E}$$

$$n^2 = 1 + \chi = 1 + N \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega_0}$$

współczynnik załamania jest zespolony: $n = n_R + in_I$ (?)

rozważmy płaską falę monochromatyczną:

$$E(x, t) = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \text{ z liczbą falową } k = \frac{n\omega}{c}$$

$$E(x, t) = E_0 e^{i\omega \left[\frac{(n_R + in_I)x}{c} - t \right]} = E_0 e^{-\underbrace{\frac{n_I \omega}{c} x}_{\kappa/2}} e^{i\left(\frac{n_R \omega}{c} x - \omega t\right)}$$

otrzymujemy prawo Beera:

$$I(x) \propto |\langle E(x, t) \rangle_t|^2 = I_0 e^{-\kappa x}$$

współ. zał. dla gazów, 2

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}, \quad \omega_0 - \text{częstość rezonansowa w atomie}$$

ale atom ma szereg częstości rezonansowych i każdy z nich daje wkład do współczynnika załamania

$$n^2 \cong 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}, \quad f_j - \text{siła oscylatora}$$

opisująca wkład danego rezonansu

- rachunki.....

$$n_R(\omega) \cong 1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{(\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_j\omega)^2}$$

$$n_I(\omega) \cong \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j\gamma_j\omega}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_j\omega)^2}$$

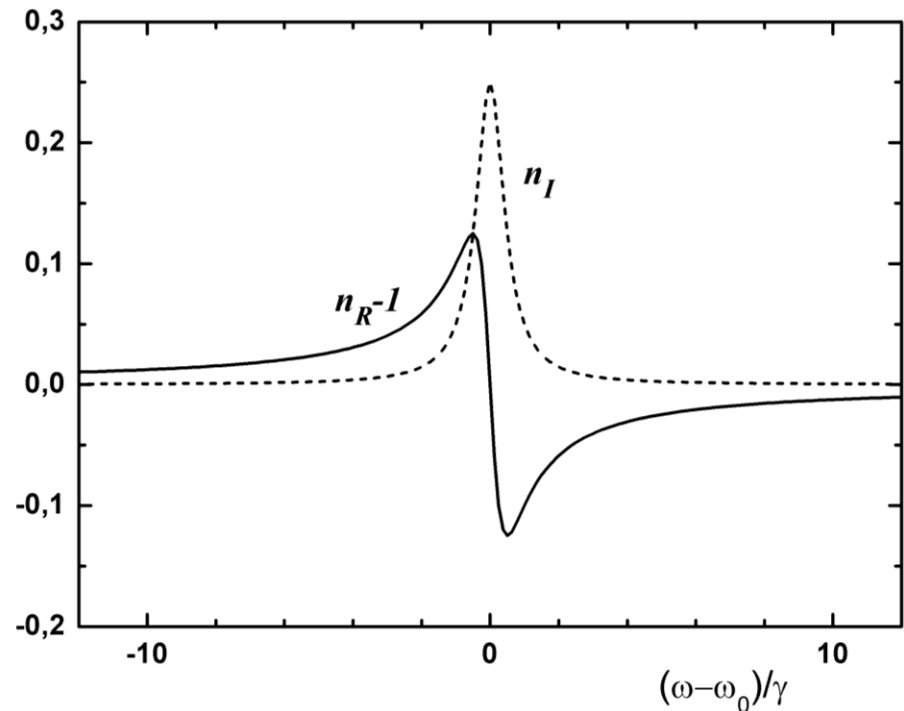
- w pobliżu rezonansu, rachunki.....

$$n_R(\omega) \cong 1 + \frac{Ne^2}{4m\epsilon_0\omega} \sum_j \frac{(\omega_j - \omega)f_j}{(\omega_j - \omega)^2 + \gamma_j^2}$$

$$n_I(\omega) \cong \frac{Ne^2}{4m\epsilon_0\omega} \sum_j \frac{f_j\gamma_j}{(\omega_j - \omega)^2 + \gamma_j^2}$$

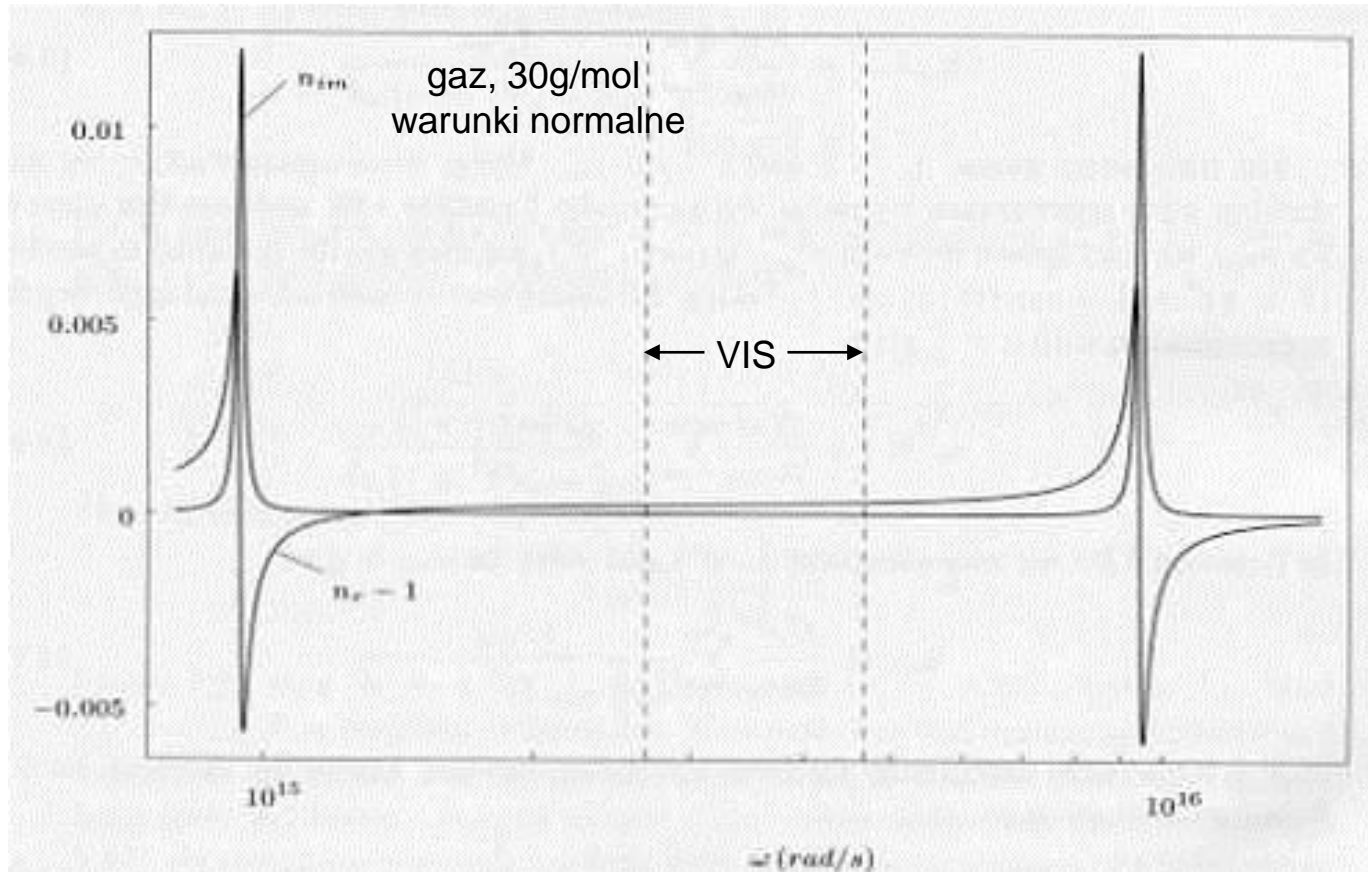
Rezonans:

linia absorpcyjna – Lorentz
dyspersja anomalna



współ. zał. dla gazów, 3

$$n^2 \cong 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}$$



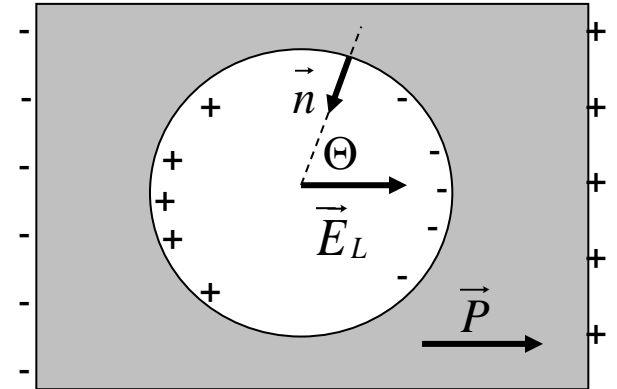
$$\lambda_1 = 0.2\mu m, \lambda_2 = 2\mu m, \quad \gamma_1/\omega_1 = \gamma_2/\omega_2 = 1/50$$

wsp. zał. dla ośrodków skondensowanych, 1

moment dipolowy atomu to $\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}_L$ gdzie α oznacza polaryzowalność atomu zaś \vec{E}_L to całkowite pole elektryczne (pole lokalne) działające na atom. Nie możemy zaniedbać pola pochodzącego od innych (spolaryzowanych) atomów.

rozważamy atom umieszczony w mikro-wnęce o promieniu R i liczymy dodatkowe pole elektryczne pochodzące od polaryzacji ośrodka \vec{P} . Rachunki w sferycznym układzie odniesienia:

$$E_P = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\Theta \left[\frac{P \cos\Theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right] R^2 \cos\Theta \sin\Theta = \frac{P}{3\epsilon_0}$$



Całkowite pole elektryczne w miejscu atomu (pole lokalne)

$$\vec{E}_L = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

polaryzuje atom

$$\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}_L$$

co skutkuje polaryzacją ośrodka

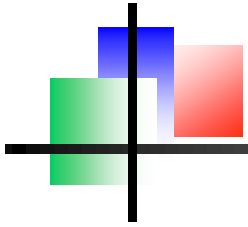
$$\vec{P} = N\epsilon_0 \alpha \vec{E}_L = N\epsilon_0 \alpha \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right)$$

wyliczamy:

$$\vec{P} = \frac{N\alpha}{1 - (N\alpha/3)} \vec{E}$$

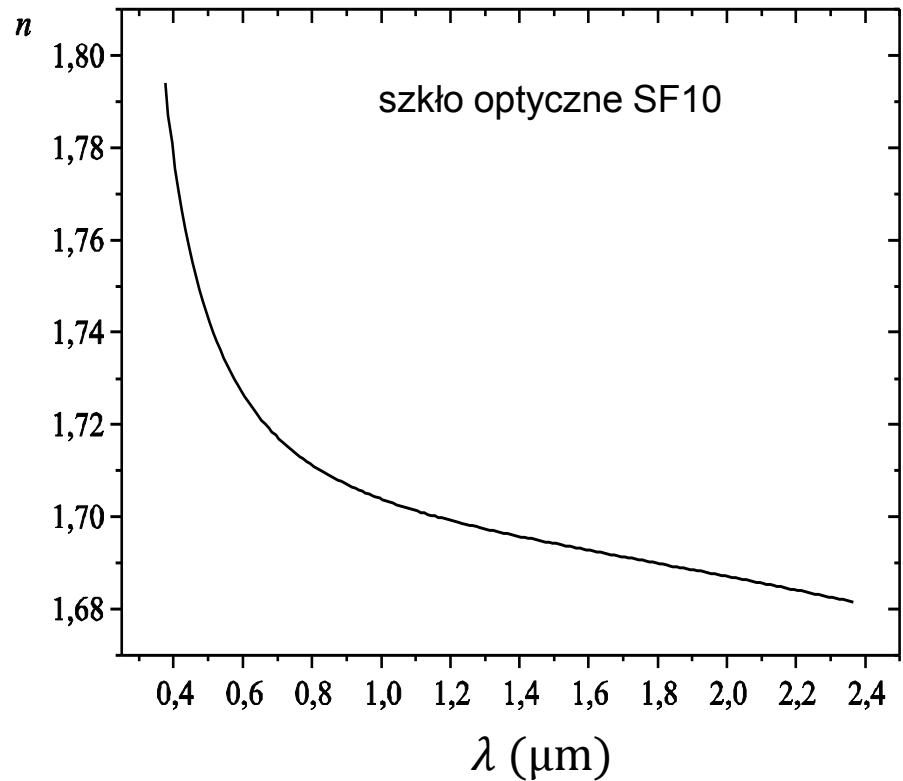
oraz

$$n^2 = 1 + \frac{N\alpha}{1 - (N\alpha/3)}$$



wsp. zał. dla ośrodków skondensowanych, 2

$$n^2 \cong 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}$$



absorpcja w UV
absorpcja IR

– przejścia elektronowe
– przejścia wibracyjne



formuły dyspersyjne

Wzory dyspersyjne stosowane dla materiałów optycznych

- równanie Cauchy'ego

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$$

- równanie Sellmeiera

$$n^2 = \sum_j \frac{A_j \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_j^2}$$

- równanie Herzbergera

$$n = A + BL + CL^2 + D\lambda^2 + E\lambda^4, \quad L = \frac{1}{\lambda^2 - 0.028}$$

- wzór katalogowy firmy Schott

$$n^2 = A_0 + A_1 \lambda^2 + \frac{A_2}{\lambda^2} + \frac{A_3}{\lambda^4} + \frac{A_4}{\lambda^6} + \frac{A_5}{\lambda^8}$$



związki Kramersa-Kroniga

- przyczynowość $\rightarrow \epsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega) = 1 + \int_0^\infty f(t)e^{-i\omega t} dt$ dla rzeczywistego ω
- rozszerzenie analityczne: zespolone ω
- matematyka ...
- wynik:

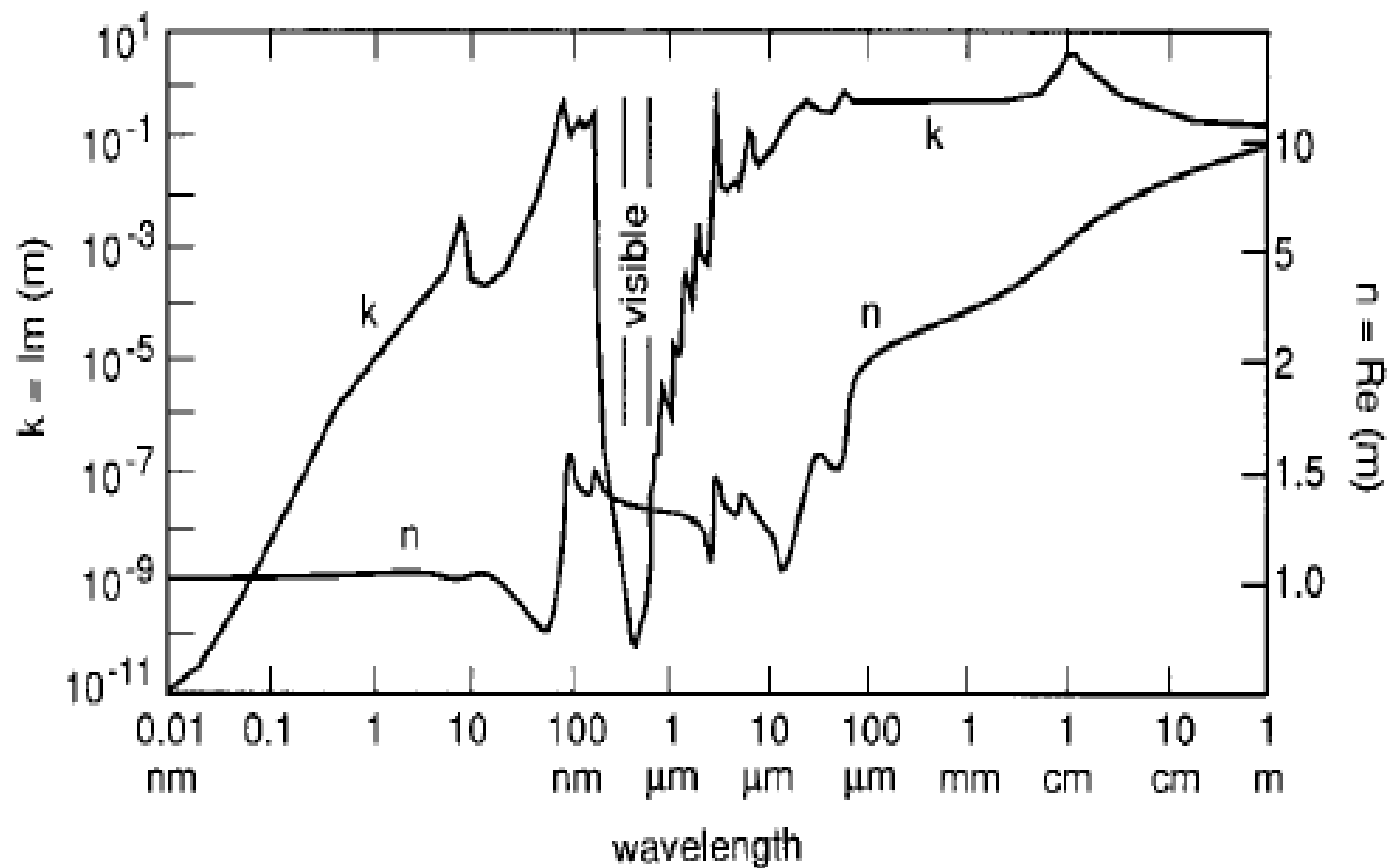
$\chi(\omega) = \chi_1(\omega) + i\chi_2(\omega)$ (χ_1, χ_2 - funkcje rzeczywiste, χ_1 opisuje współczynnik załamania a χ_2 tłumienie)

$$\chi_1(\omega) = \frac{2}{\pi} \wp \int_0^\infty \frac{\omega' \chi_2(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$
$$\chi_2(\omega) = \frac{2}{\pi} \wp \int_0^\infty \frac{\omega' \chi_1(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

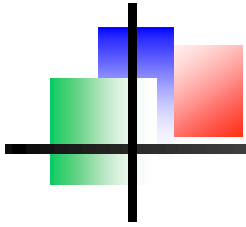
gdzie \wp oznacza wartość główną całki w rozumieniu Cauchy

absorpcja \rightarrow współczynnik załamania
współczynnik załamania \rightarrow absorpcja

związki K-K: przykład - woda



V. M. Zolotarev and A. V. Demin, "Optical Constants of Water over a Broad Range of Wavelengths, 0.1 Å–1 m," *Opt. Spectrosc. (U.S.S.R.)* **43**(2):157 (Aug. 1977).



fale EM w przewodnikach, 1

rotacja r-nia (2) plus r-nie (1) dają:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (5)$$

załóżmy płaską falę monochromatyczną

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

wtedy:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -(\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} + k^2 \vec{E}$$

i r-nie (5) wygląda tak:

$$-(\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} + k^2 \vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \left(\epsilon - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right) \vec{E} = 0$$

oznaczmy:

$$\hat{n}^2 = \epsilon - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}$$

co daje

$$-(\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} + k^2 \vec{E} - \frac{\hat{n}^2 \omega^2}{c^2} \vec{E} = 0$$

$\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (prawo Ohma, σ to przewodność elektryczna)

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4)$$

ϵ to stała dielektryczna materiału bez swobodnych nośników prądu (szkielet jonowy materiału)

ruch elektronów w przewodniku

Model Drude'go

r-nie ruchu elektronu w polu fali e.m. $\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ z uwzględnieniem tarcia γ :

$$m \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + m\gamma \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = -e\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

ma rozwiązanie:
$$\vec{r}(t) = \frac{-e}{m(\omega^2 + i\gamma\omega)} \vec{E}$$

a wyrażenie na prąd:
$$\vec{j} = -Ne\vec{r} = \frac{Ne^2}{m(\gamma - i\omega)} \vec{E} = \sigma \vec{E}$$

pozwała wyliczyć przewodność elektryczną

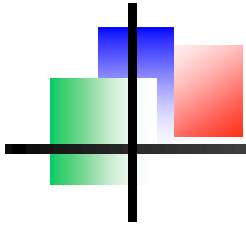
$$\sigma = \frac{Ne^2}{m(\gamma - i\omega)}$$

ostatecznie:

$$\hat{n}^2 = \epsilon - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} = \epsilon - \frac{Ne^2}{m\omega \epsilon_0 (\gamma - i\omega)}$$



Paul Karl Ludwig Drude
1863 – 1906



fale EM w przewodnikach, 2

wracamy do r-nia falowego w przewodniku:

$$-(\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k} + k^2\vec{E} - \frac{\hat{n}^2\omega^2}{c^2}\vec{E} = 0$$

i rozważamy dwa szczególne przypadki

1. fale podłużne

$$\vec{k} \parallel \vec{E}$$

$$(\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k} = k^2\vec{E} \Rightarrow \hat{n}^2 = \epsilon - \frac{Ne^2}{m\omega\epsilon_0(\gamma - i\omega)} = 0$$

Założmy bardzo dobry przewodnik ($\gamma \ll \omega$). Wtedy warunek

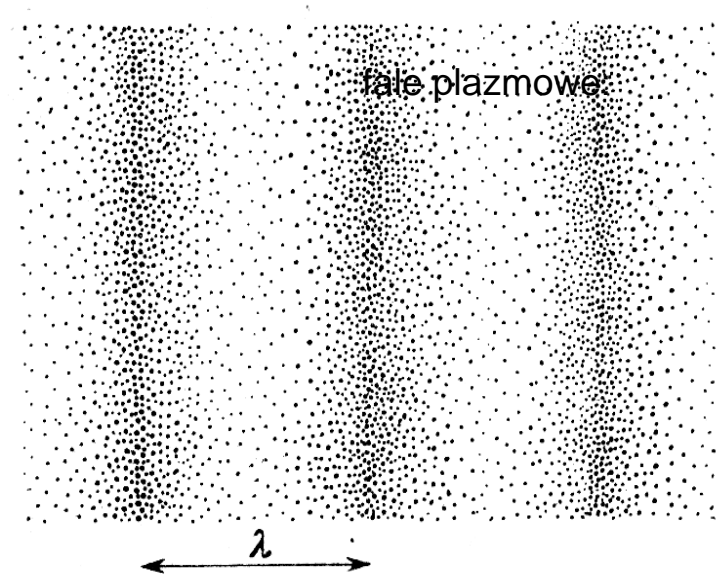
$$\epsilon \left(1 - \frac{Ne^2}{m\epsilon\epsilon_0\omega^2} \right) = 0$$

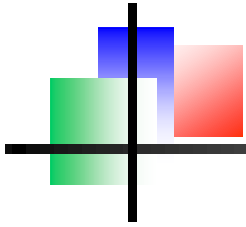
pozwała zdefiniować częstość plazmową

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon\epsilon_0}}$$

a współczynnik załamania w przewodniku zapisać jako

$$\hat{n}^2(\omega) = \epsilon \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$





fale EM w przewodnikach, 3

$$-(\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k} + k^2\vec{E} - \frac{\hat{n}^2\omega^2}{c^2}\vec{E} = 0$$

2. fale poprzeczne

$$\vec{k} \perp \vec{E} \Rightarrow (\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k} = 0$$

Dostajemy równanie Helmholtza

$$\Delta\vec{E} - k^2\vec{E} = 0,$$

gdzie $k = \frac{\hat{n}\omega}{c}$ jest liczbą zespoloną

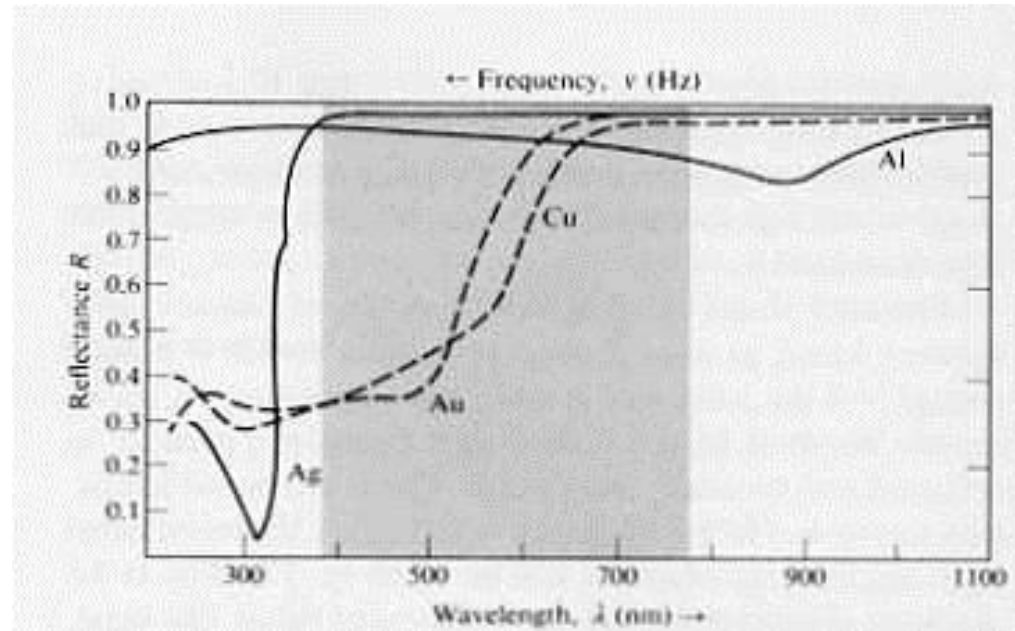
zespolone k oznacza absorpcję światła

$$\begin{aligned} E(x, t) &= E_0 e^{-i(kx - \omega t)} \\ &= E_0 e^{-\frac{n_I \omega}{c} x} \cdot e^{i\left(\frac{n_R \omega}{c} x - \omega t\right)} \end{aligned}$$

metal czy dielektryk?

$$\hat{n}^2 = \epsilon \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\gamma\omega} \right) \cong \epsilon \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

- $\omega < \omega_p \Rightarrow \hat{n} \cong n_I$
- $\omega > \omega_p \Rightarrow \hat{n} \cong n_R$



fale EM w przewodnikach, 4



fale EM w przewodnikach, 5



widmo światła

Natężenie spektralne (widmo) $I(\omega), I(\lambda)$:

$I(\omega)d\omega$ - natężenie dla częstości z przedziału $(\omega, \omega + d\omega)$

$I(\lambda)d\lambda$ - natężenie dla długości fali z przedziału $(\lambda, \lambda + d\lambda)$

Dla danego pola fali $E(t)$ liczymy jego transformatę Fouriera i dostajemy amplitudę spektralną pola:

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(t)e^{-i\omega t} dt$$

Mając amplitudę spektralną możemy wrócić do domeny czasu:

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

Twierdzenie Parsewala:

$$\int |E(t)|^2 dt = \int |\tilde{E}(\omega)|^2 d\omega$$

$$\int I(t) dt = \int I(\omega) d\omega$$

widmo

funkcja autokorelacji pola 1-go rzędu:

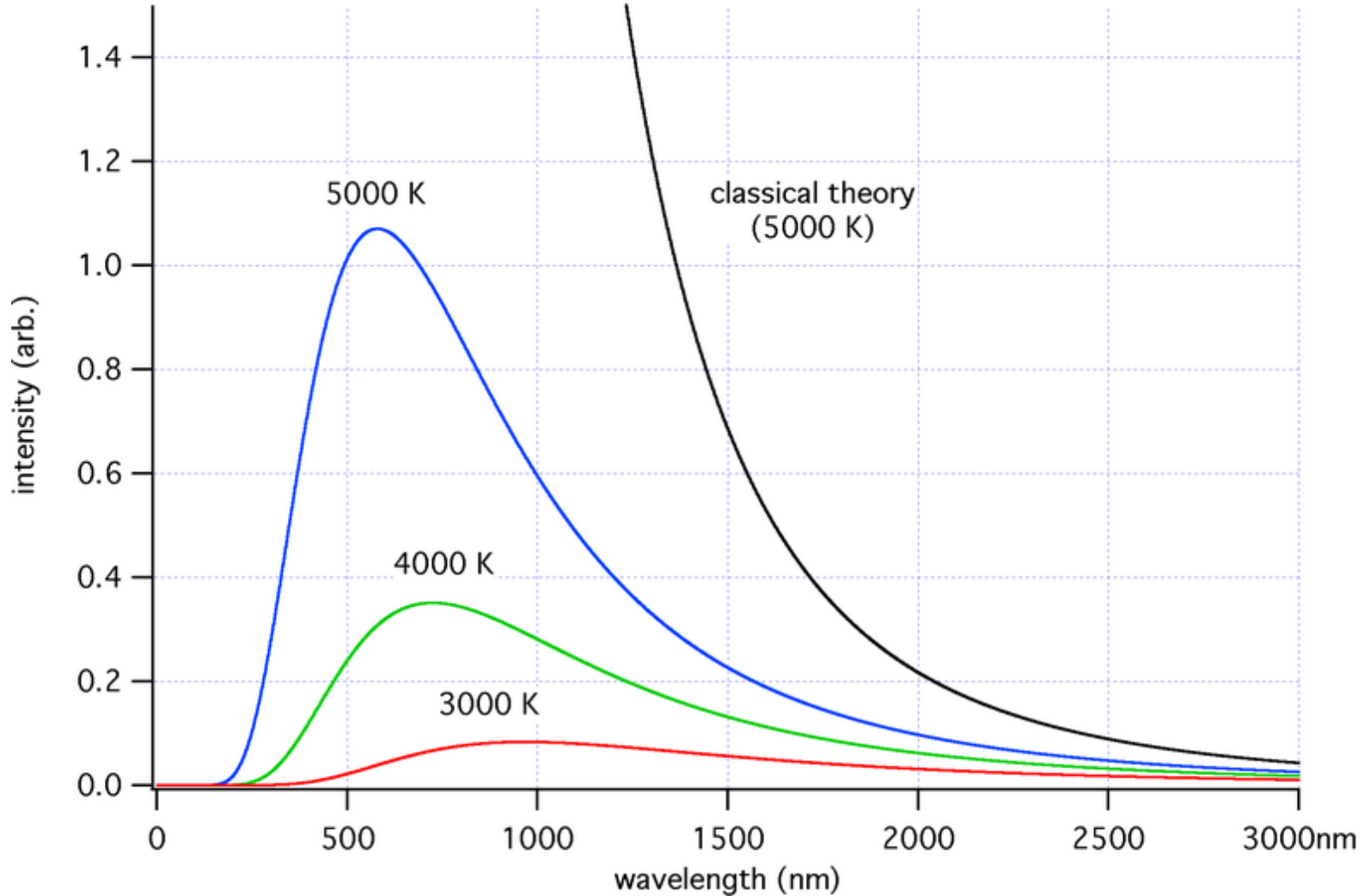
$$AC(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} E^*(t)E(t-\tau) dt$$

twierdzenie Wienera-Chinczyna

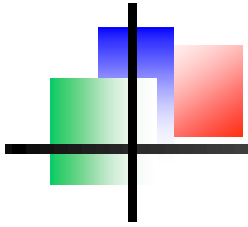
$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} AC(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau$$

widmo światła

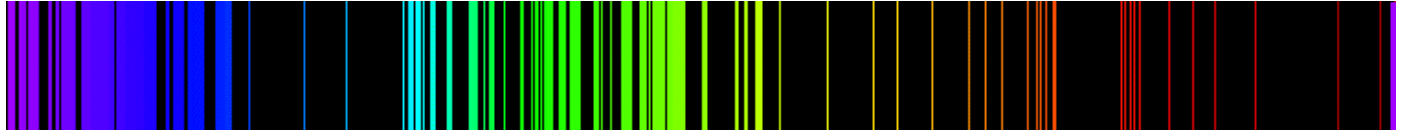
widmo ciągłe,
np. rozgrzana
powierzchnia



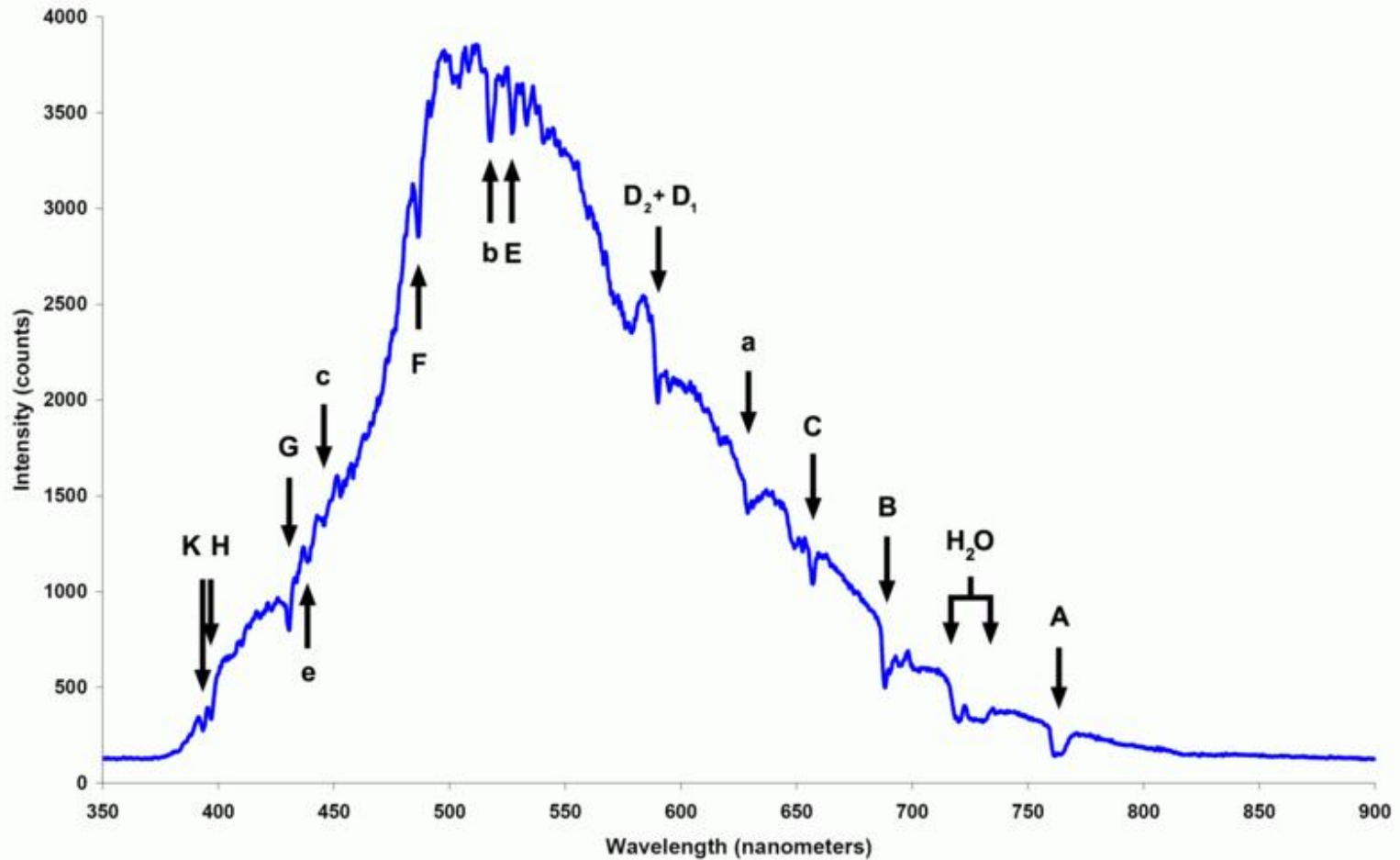
widmo światła

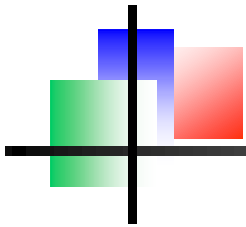


widmo dyskretne: Fe



widmo ciągłe z
dyskretnymi
liniami absorpcyjnymi
- widmo Słońca na
powierzchni Ziemi

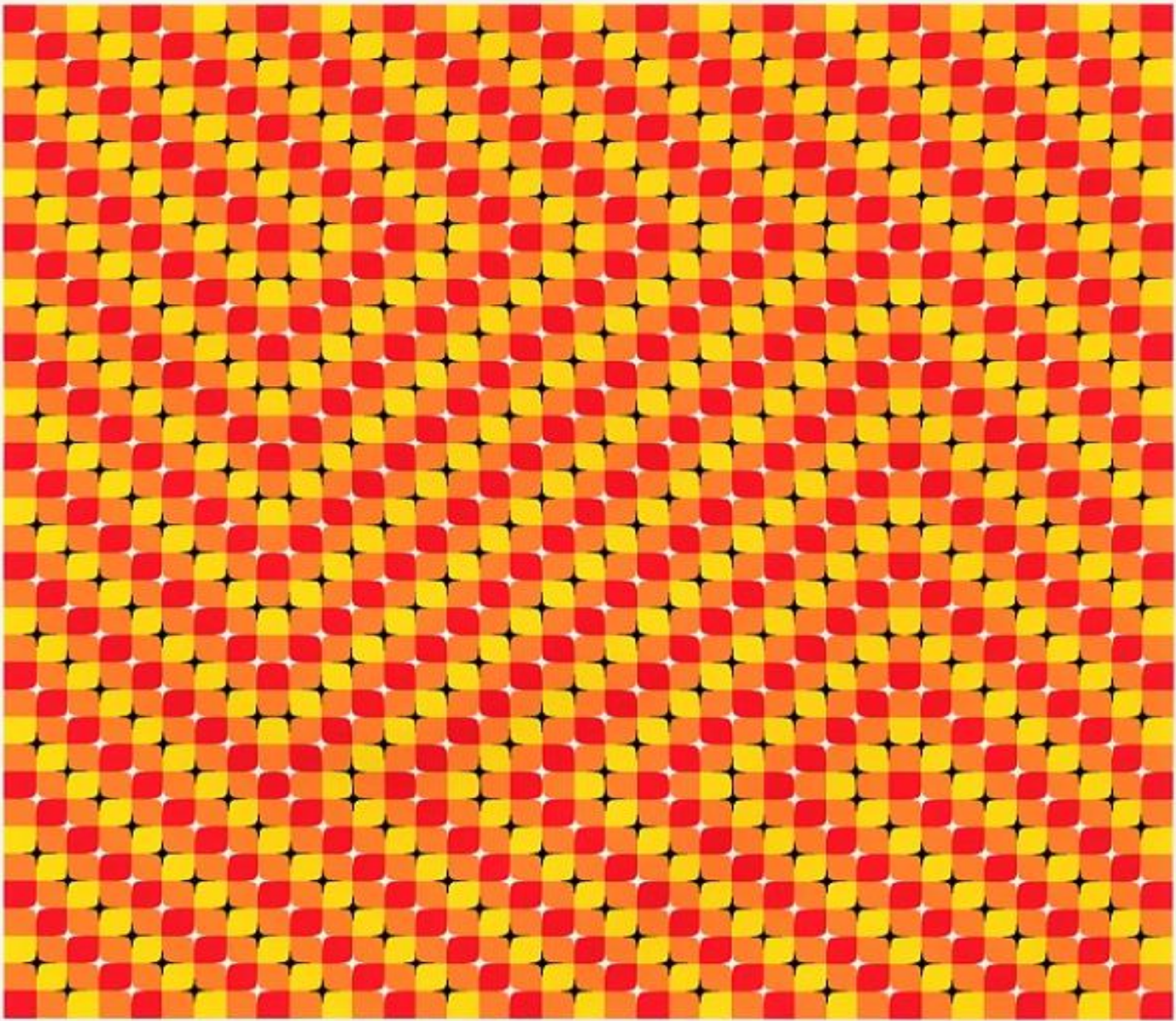




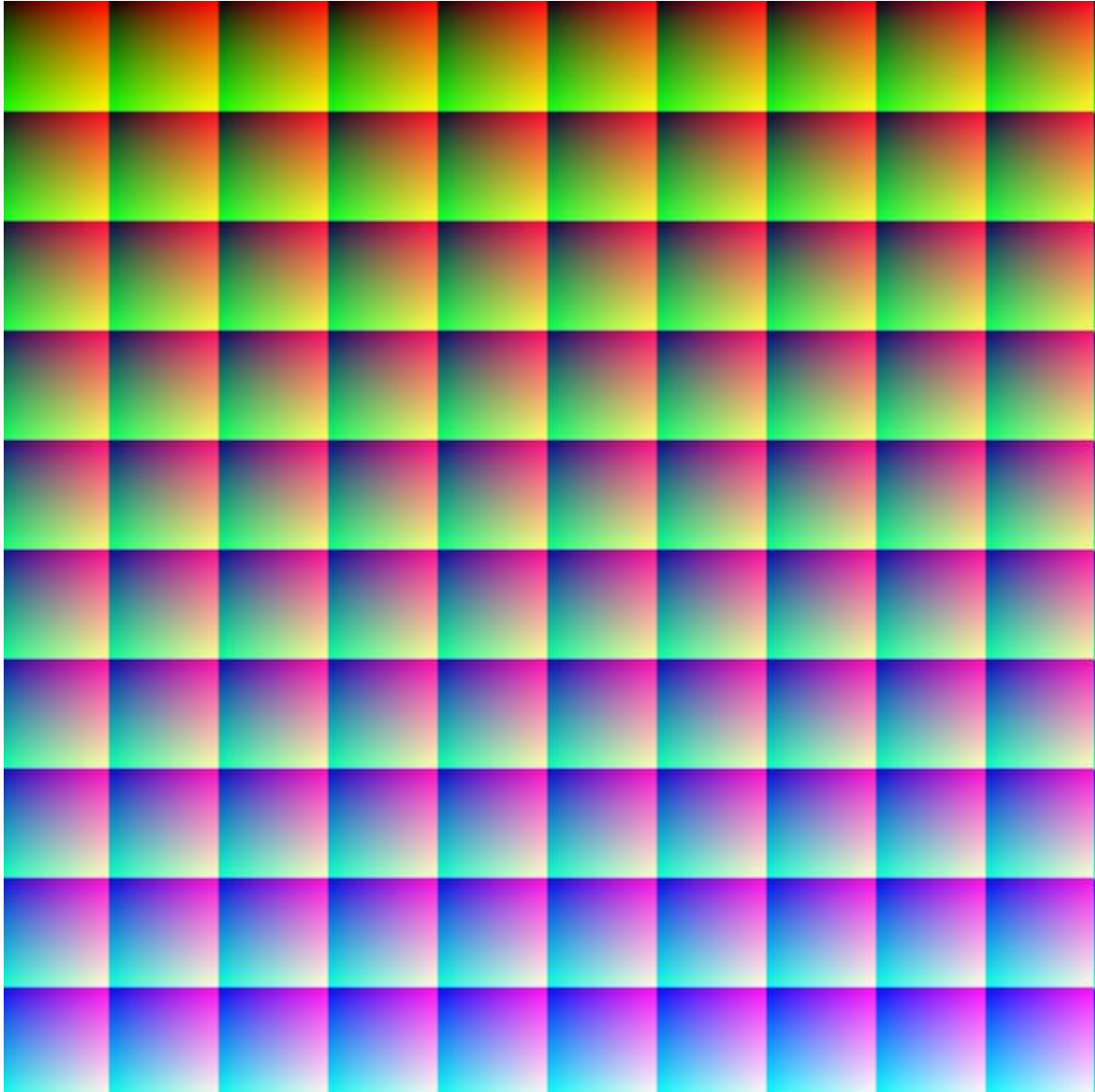
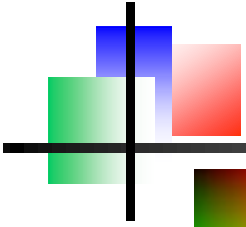
widmo Słońca na powierzchni Ziemi - tabela

Designation	Element	Wavelength (nm)	Designation	Element	Wavelength (nm)
y	<u>O₂</u>	898.765	c	Fe	495.761
Z	O ₂	822.696	F	Hβ	486.134
A	O ₂	759.370	d	Fe	466.814
B	O ₂	686.719	e	Fe	438.355
C	<u>Hα</u>	656.281	G'	Hγ	434.047
a	O ₂	627.661	G	Fe	430.790
D₁	<u>Na</u>	589.592	G	<u>Ca</u>	430.774
D ₂	Na	588.995	h	Hδ	410.175
D ₃ or d	<u>He</u>	587.5618	H	Ca ⁺	396.847
e	<u>Hg</u>	546.073	K	Ca ⁺	393.368
E ₂	<u>Fe</u>	527.039	L	Fe	382.044
b ₁	<u>Mg</u>	518.362	N	Fe	358.121
b ₂	Mg	517.270	P	<u>Ti⁺</u>	336.112
b ₃	Fe	516.891	T	Fe	302.108
b ₄	Fe	516.891	t	<u>Ni</u>	299.444
b ₄	Mg	516.733			

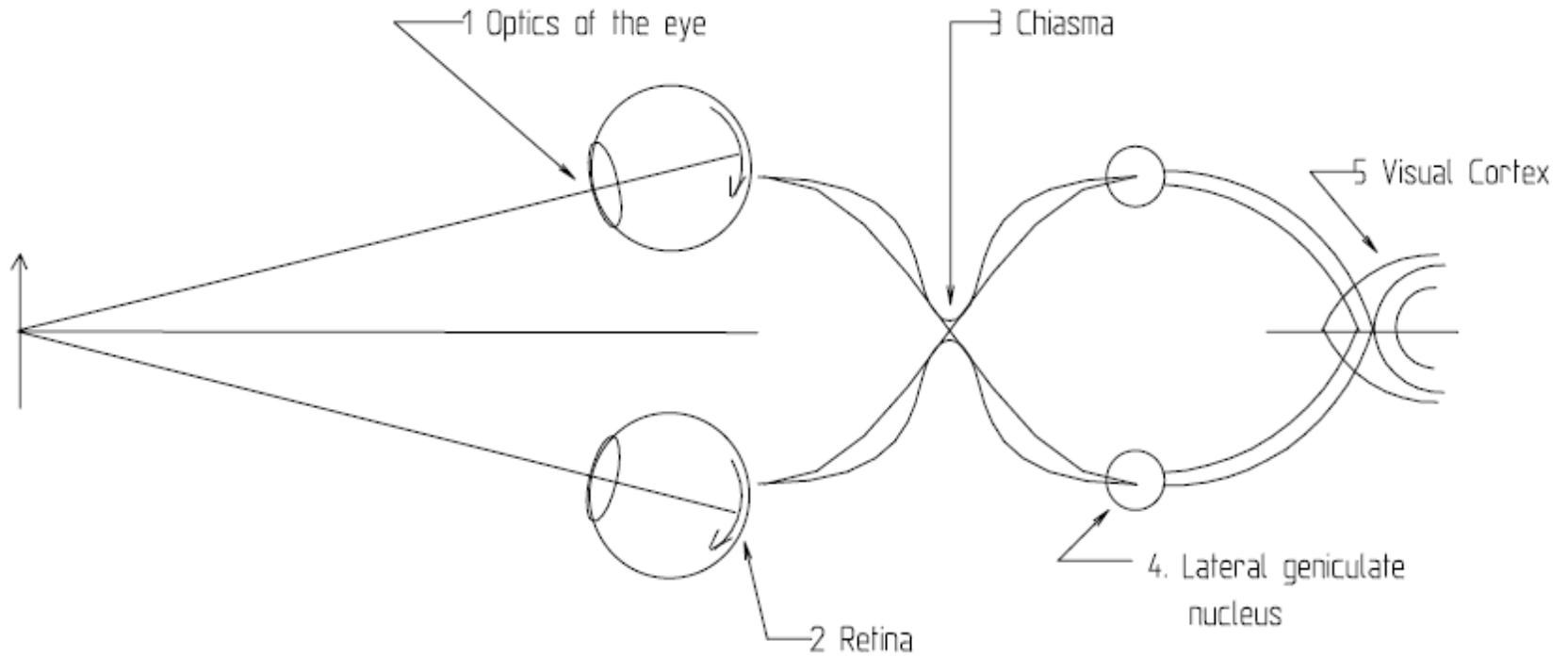
barwy, 1



barwy, 2



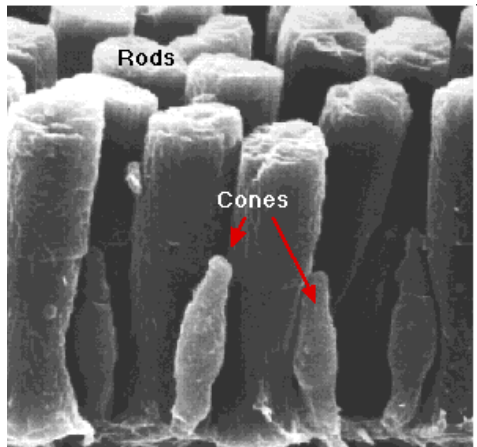
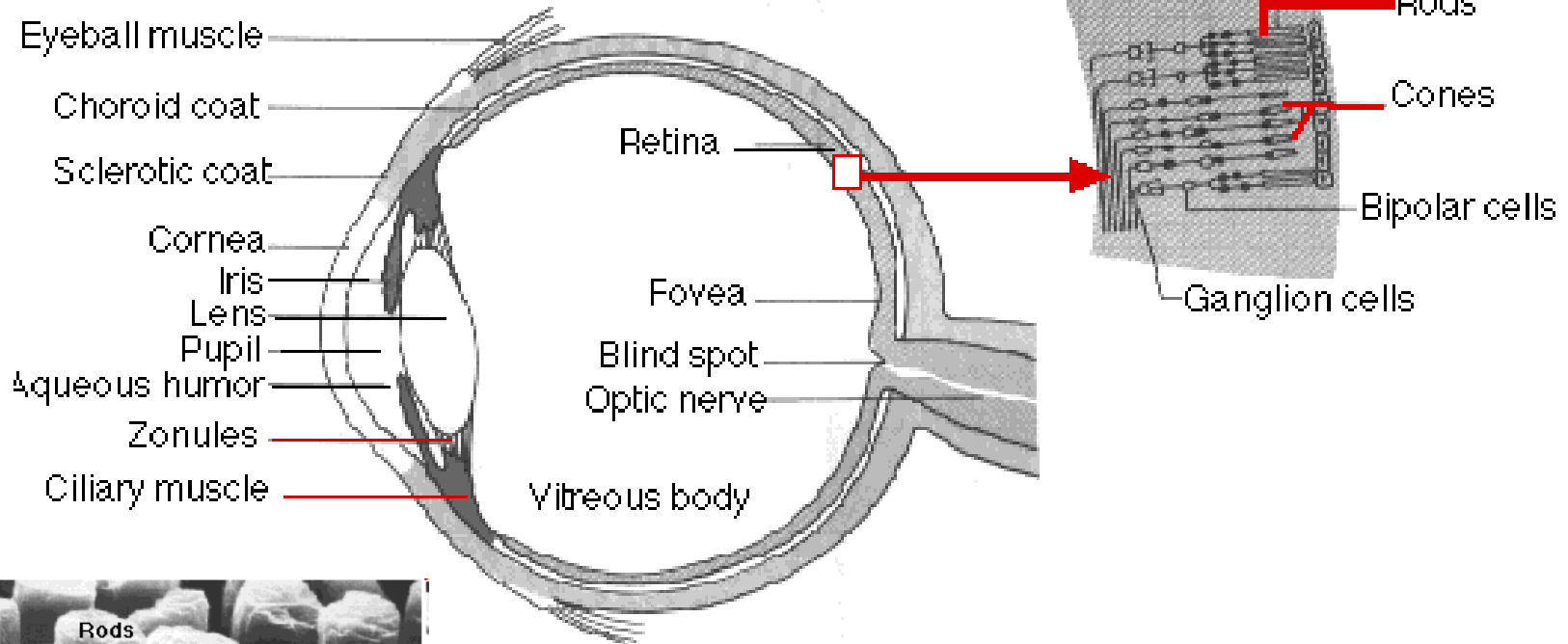
wzrok



Funkcje:

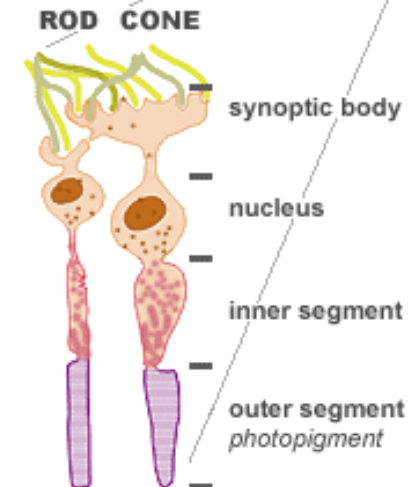
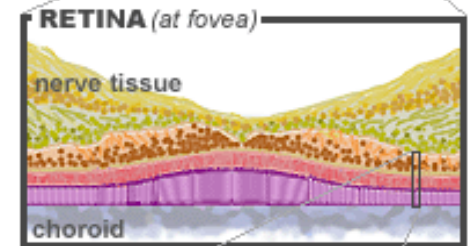
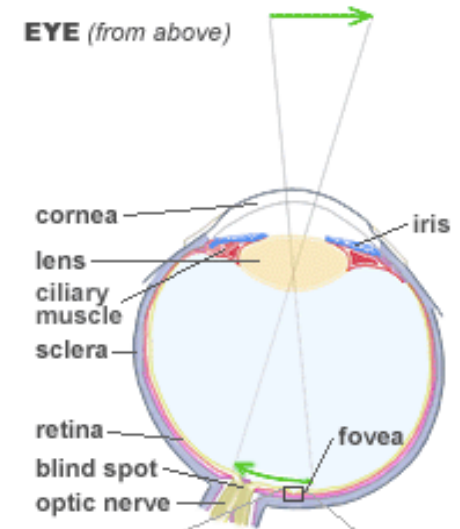
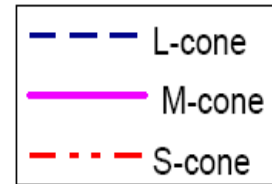
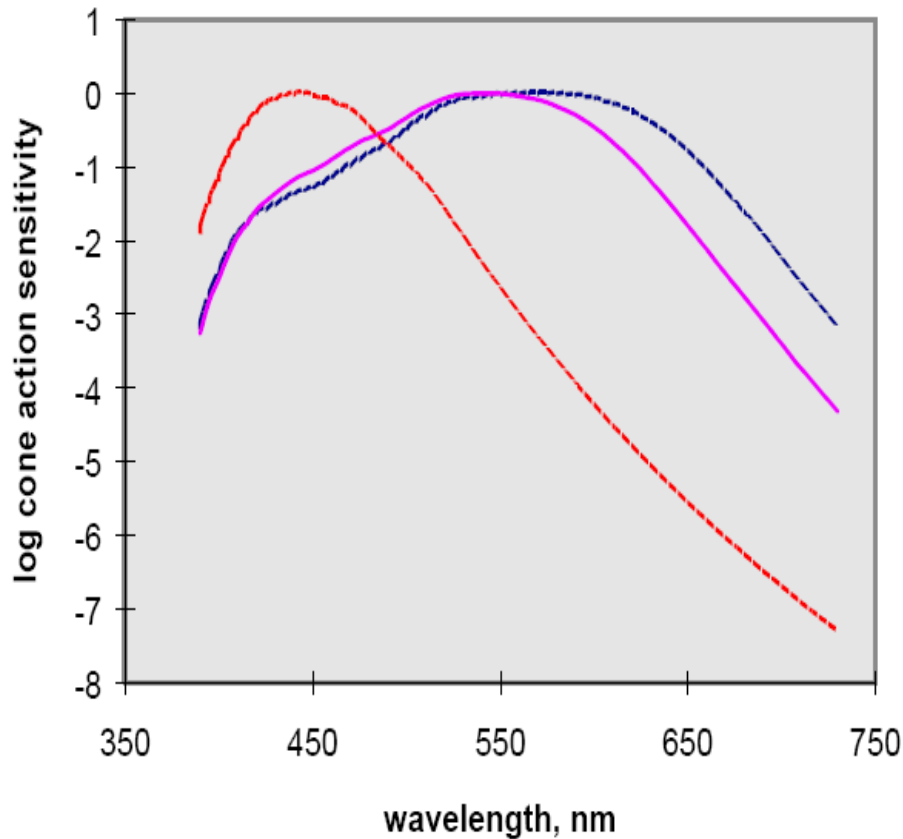
- obrazowanie
- detekcja
- obróbka danych
- przesyłanie danych

oko człowieka, 1

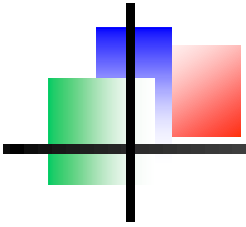


oko człowieka, 2

względna (unormowana o 1) czułość czopków



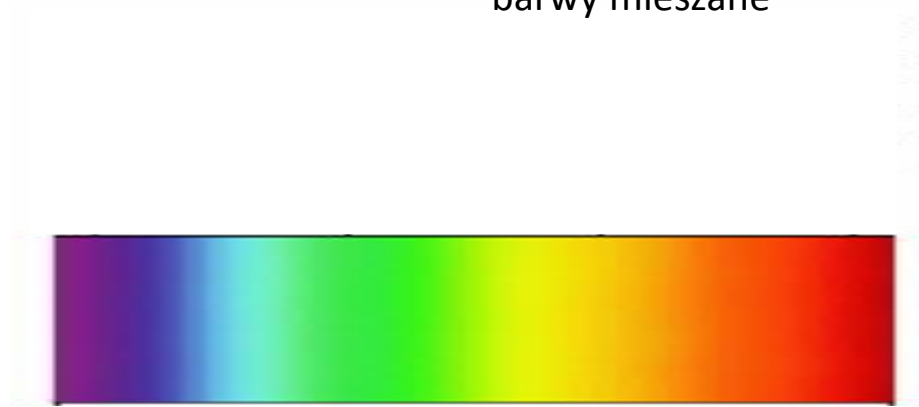
barwy, 1



synteza barw

ile jest barw?

barwy czyste
barwy mieszane

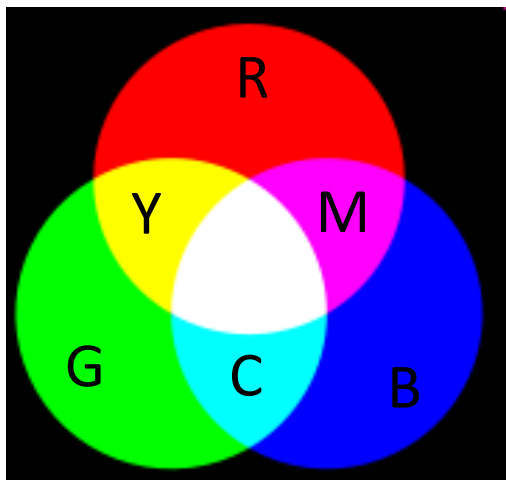


barwy czyste

Dodawanie i odejmowanie barw

barwy, 2

Lata 20-te XX wieku: synteza barw
czystych z trzech kolorów – RGB
R – 700nm, G – 546 nm, B – 436 nm

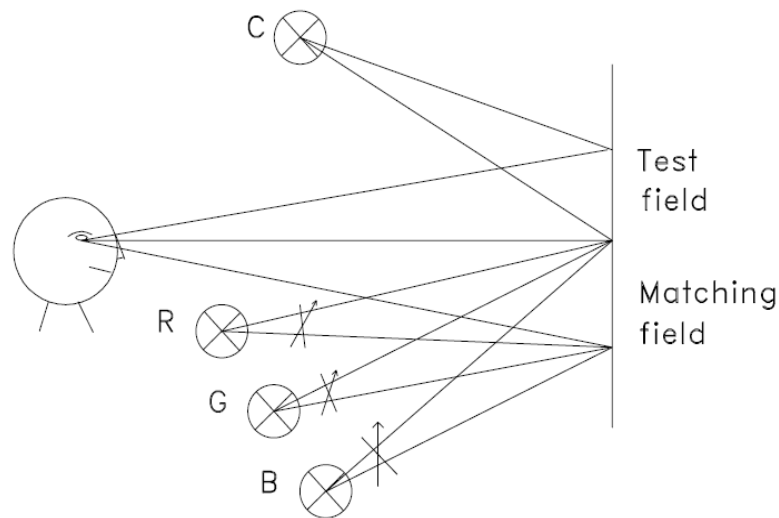


synteza (dodawanie) barw

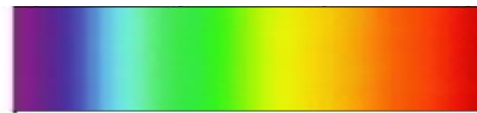
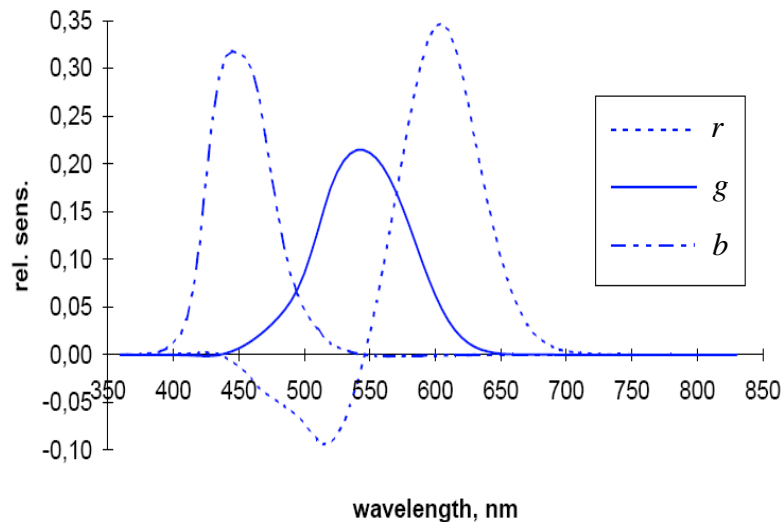
$$R = \int_0^{\infty} I(\lambda)r(\lambda)d\lambda$$

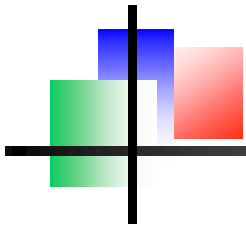
$$G = \int_0^{\infty} I(\lambda)g(\lambda)d\lambda$$

$$B = \int_0^{\infty} I(\lambda)b(\lambda)d\lambda$$



wynik





barwy, 3

Lata 30-te XX wieku: synteza barw czystych z trzech kolorów – RGB, c.d.

Liniowa transformacja sygnałów:

$$\begin{bmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \\ z(\lambda) \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} r(\lambda) \\ g(\lambda) \\ b(\lambda) \end{bmatrix}$$

$$X = \int_0^{\infty} I(\lambda)x(\lambda)d\lambda$$

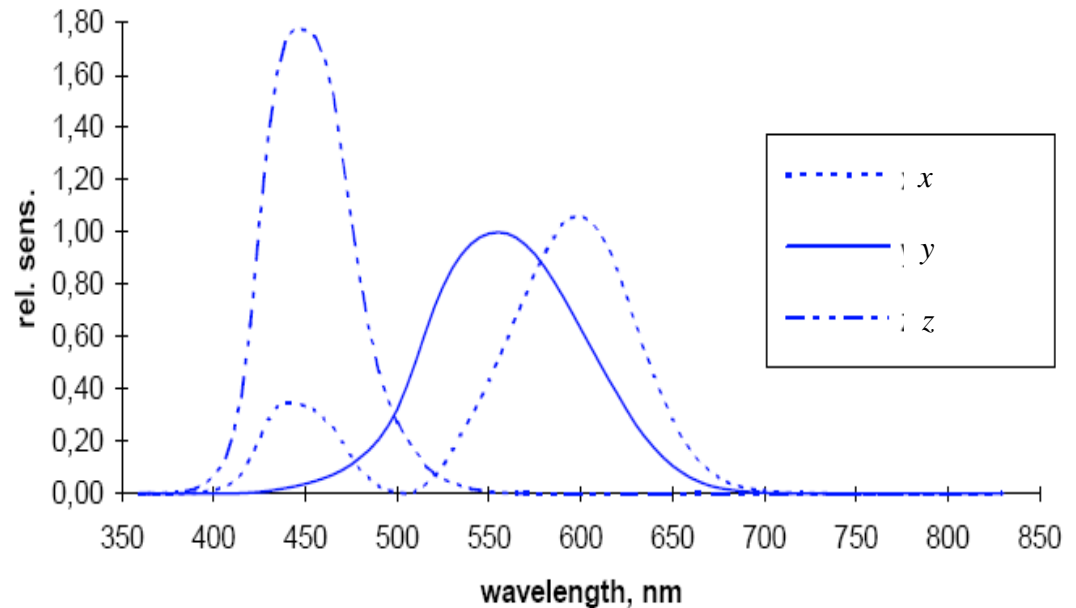
$$Y = \int_0^{\infty} I(\lambda)y(\lambda)d\lambda$$

$$Z = \int_0^{\infty} I(\lambda)z(\lambda)d\lambda$$

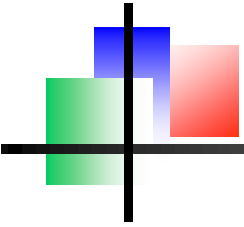


COMMISSION INTERNATIONALE DE L'ECLAIRAGE
INTERNATIONAL COMMISSION ON ILLUMINATION
INTERNATIONALE BELEUCHTUNGSKOMMISSION

CIE 1931 Standard Colorimetric Observer



normujemy współczynniki: $x = \frac{X}{X+Y+Z}$, $y = \frac{Y}{X+Y+Z}$, $z = 1 - x - y$

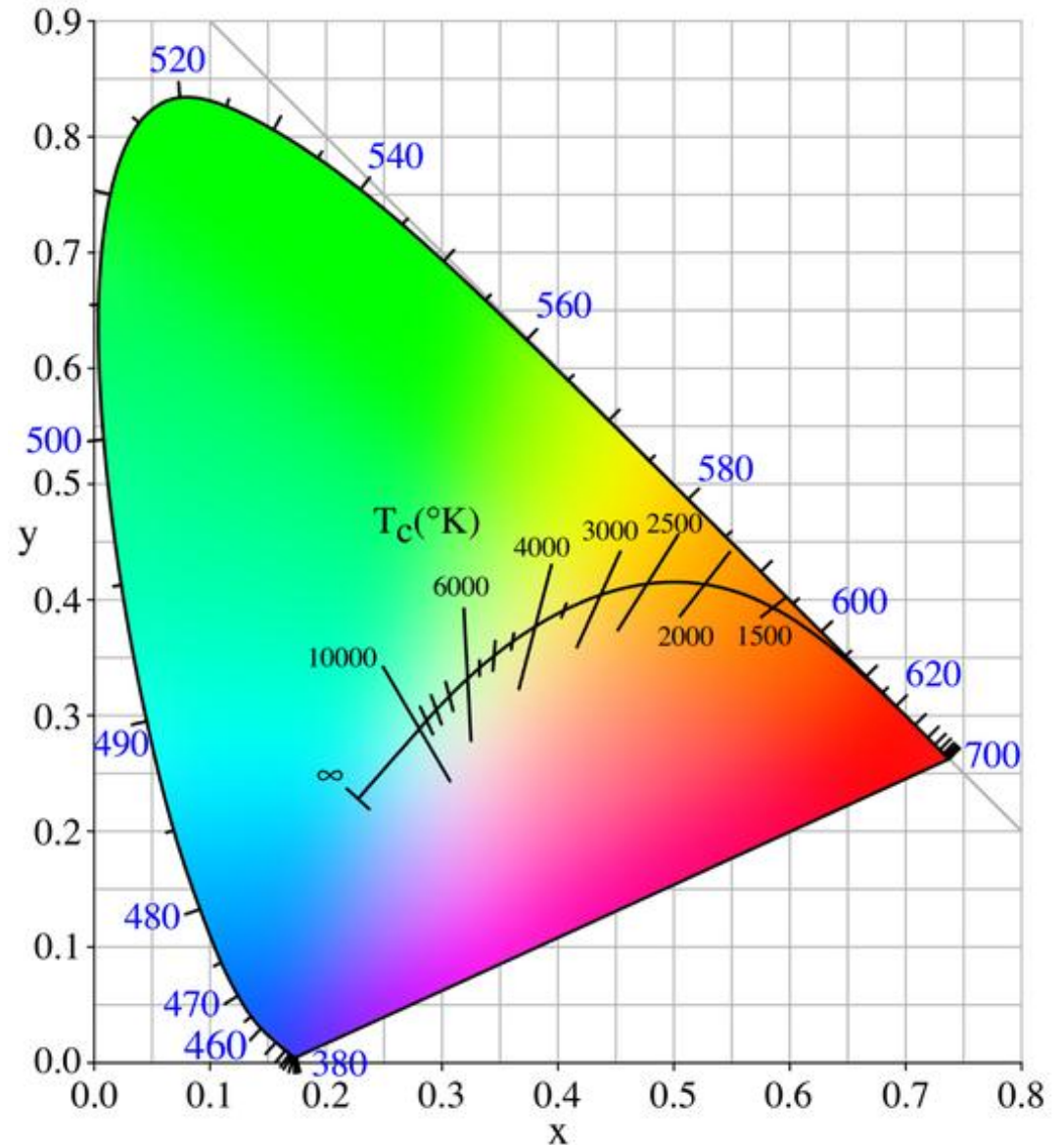


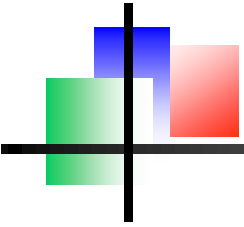
barwy, 4

trójkąt barw:
 $x + y + z = 1$

$x = 0.333, y = 0.333,$
światło białe

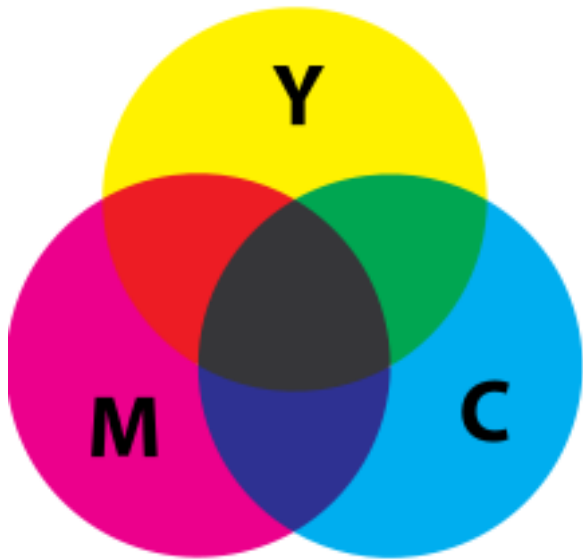
temperatura barwna, np. dla 5000K
 $x = 0.3478, y = 0.3595,$





barwy, 5

odejmowanie barw (farby, druk, etc.):



CMYK

W - biały

M (Magenta) = W - G

C (Cyan) = W - R

Y (Yellow) = W - B

